លីមីត

បណ្ឌិត មាស ឡេន

សាស្ត្រាចារ្យរង

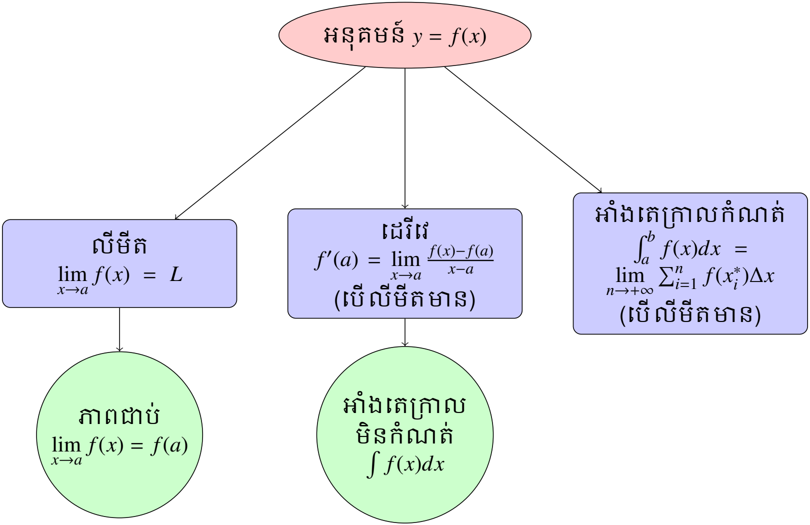
ដេប៉ាតឺម៉ង់គណិតវិទ្យា(ស.ភ.ភ.ព)

២០២៥

មាតិកា

1. សញ្ញាណសំខាន់ៗ
2. តើអ្វីជាលីមីតនៃអនុគមន៍?
3. ក្បួនគណនាលីមីត
4. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

សញ្ញាណសំខាន់ៗនៅក្នុងគណិតគណនា



សំណួរគន្លឹះ

បើគេឱ្យអនុគមន៍ $y = f(x)$

1. តើ $\lim_{x \to a} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(a)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_a^b f(x)dx$ មានឬទេ?

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x$

1. តើ $\lim_{x\to 0} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(0)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មានឬទេ?

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = |x|$

1. តើ $\lim_{x\to 0} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(0)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មានឬទេ?

លំហាត់គិតលេង

គេឱ្យអនុគមន៍ $f(x) = x|x|$

1. តើ $\lim_{x \to 0} f(x)$ មានឬទេ?
2. តើ $f'(0)$ មានឬទេ?
3. តើ $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ មានឬទេ?

ចំណោទបញ្ហាសំខាន់ៗ

1. បញ្ហាសមីការបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង(ដេរីវេ)
2. បញ្ហាល្បឿននិងសំទុះ(ដេរីវេ)
3. បញ្ហាបរមាកម្ម(ដេរីវេ)
4. បញ្ហាក្រឡាផ្ទៃនិងមាឌ(អាំងតេក្រាលកំណត់)

មាតិកា

1 សញ្ញាណសំខាន់ៗ

2 តើអ្វីជាលីមីតនៃអនុគមន៍?

3 ក្បួនគណនាលីមីត

4 ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

លីមីតនៃអនុគមន៍

- គណិតគណនាគឺផ្អែកលើបញ្ញតិនៃលីមីត។
- លីមីតជាមូលដ្ឋាននៃប្រមាណវិធីសំខាន់ពីរនៅក្នុងគណិតគណនាគឺ ដេរីវេនិងអាំងតេក្រាល។
- ដេរីវេអាចឱ្យយើងគណនាអត្រាបម្រែបម្រួលនៃអនុគមន៍ ល្បឿននិង សំទុះ អត្រាកើនឡើងនៃប្រជាជន។
- អាំងតេក្រាលអាចឱ្យយើងគណនាក្រឡាផ្ទៃនៅក្រោមខ្សែកោង ក្រឡាផ្ទៃមុខកាត់និងមាឌ។

ឥឡូវយើងបង្ហាញថាតើលីមីតមាននៅក្នុងបញ្ហាពីរផ្សេងគ្នា

- រកល្បឿនខណៈនៃវត្ថុដែលមានចលនា
- រកមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង

ល្បឿនមធ្យម

ឧបមាថាយើងចង់គណនាល្បឿនមធ្យមនៅពេលដែលយើងធ្វើដំណើរតាមបណ្តោយវិថីត្រង់មួយ។ បើយើងឆ្លងកាត់បង្គោលគីឡូម៉ែត្រលេខ 100 នៅវេលាថ្ងៃត្រង់ $12:00\,P.M.$ បង្គោលគីឡូម៉ែត្រលេខ 130 នៅវេលាថ្ងៃត្រង់ $12:30\,P.M.$ ។ យើងធ្វើដំណើរបាន $30km$ ក្នុងរយៈពេលកន្លះម៉ោង ដូចនេះល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះម៉ោងនេះគឺ $(30\,km)/(0.5\,h) = 60\,km/h$។ ទោះបីជាល្បឿនមធ្យមគឺ $60\,km/h$ ល្បឿនខណៈដែលបង្ហាញដោយកុងទ័រល្បឿនគឺប្រែប្រួលពីខណៈមួយទៅខណៈមួយទៀត។

ឧទាហរណ៍

សន្មតថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកម្ពស់ 450 m ពីដី។ រកល្បឿនមធ្យមនៃបាល់នៅចន្លោះ

១ $t = 1\ s$ និង $t = 3\ s$
២ $t = 1\ s$ និង $t = 2\ s$

តាង $s(t)$ ជាចម្ងាយគិតជាម៉ែត្រដែលបានធ្លាក់បន្ទាប់ពី t វិនាទីនោះ

$$s(t) = 4.9t^2$$

ល្បឿនមធ្យមនៃបាល់នៅចន្លោះពេល $[t_0, t_1]$ គឺជាបម្រែបម្រួលនៃទីតាំងចែកនឹងបម្រែបម្រួលពេលវេលា

$$v_{av} = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ដូច្នេះ ល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេល $[1,3]$ គឺ

$$v_{av} = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = 19.6\, m/s$$

ល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះពេល $[1,2]$ គឺ

$$v_{av} = \frac{s(2) - s(1)}{2 - 1} = \frac{19.6 - 4.9}{2 - 1} = 14.7\, m/s$$

សម្គាល់

ល្បឿនមធ្យមគឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាម $(t_0, s(t_0))$ និង $(t_1, s(t_1))$ មានន័យថា

$$v_{av} = m = \frac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$$

ល្បឿនខណៈ:

ដើម្បីគណនាល្បឿនមធ្យមយើងប្រើទីតាំងពីរខុសគ្នានៅពេលខុសគ្នា។ តើយើងគណនាល្បឿននៅខណៈណាមួយយ៉ាងដូចម្តេច? ល្បឿននៅខណៈ $t = t_0$ គឺត្រូវបានកំណត់ដោយការគណនាល្បឿនមធ្យមនៅចន្លោះ $[t_0, t_1]$ ដោយបន្ថយប្រវែងរបស់វា។ នៅពេលដែល t_1 ខិតទៅរក t_0 នោះល្បឿនមធ្យមគឺខិតទៅរកតម្លៃតែមួយគត់ដែលជាល្បឿនខណៈ។

ឧទាហរណ៍

សន្មតថាបាល់មួយត្រូវបានទម្លាក់ពីអាគារមួយដែលមានកម្ពស់ 450 m ពីដី។ រកល្បឿននៃបាល់នៅខណៈ $t = 5\ s$

យើងមាន

$$s(t) = 4.9t^2$$

យើងចាប់អារម្មណ៍ទៅលើល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ នោះយើងគណនា ល្បឿនមធ្យមលើចន្លោះខ្លីទៅៗ $[5, t]$ ដោយប្រើរូបមន្ត

$$v_{av} = \frac{s(t) - s(5)}{t - 5}$$

ចន្លោះពេល	ល្បឿនមធ្យម (m/s)
$5 \le t \le 6$	53.9
$5 \le t \le 5.1$	49.49
$5 \le t \le 5.05$	49.245
$5 \le t \le 5.01$	49.049
$5 \le t \le 5.001$	49.0049

យើងសង្កេតឃើញថានៅពេលដែលចន្លោះពេលត្រូវបានបន្ថយឱ្យខ្លី ល្បឿនមធ្យមកាន់តែខិតទៅជិត $49\, m/s$។

ល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ គឺត្រូវបានកំណត់ជាតម្លៃលីមីតនៃល្បឿនមធ្យមទាំងនេះនៅលើចន្លោះកាន់តែខ្លីទៅៗចាប់ផ្ដើមនៅ $t = 5$ ។ដូច្នេះល្បឿននៅខណៈ $t = 5$ គឺ $v = 49\,m/s$

សម្គាល់

- យើងនឹងទទួលបានល្បឿនខណៈដូចគ្នានៅពេលដែល t ខិតទៅរក 5 ពីខាងឆ្វេង (ដែល $t < 5$) និងនៅពេលដែល t ខិតទៅរក 5 ពីខាងស្ដាំ (ដែល $t > 5$)
- យើងនិយាយថាលីមីតនៃ v_{av} ពេល t ខិតទៅរក 5 ស្មើនឹងល្បឿនខណៈ $v_{inst} = 49\,m/s$។ យើងកំណត់សរសេរ

$$v_{inst} = \lim_{t\to 5} v_{av} = \lim_{t\to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 49\,m/s$$

មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ

ល្បឿនមធ្យមនីមួយៗត្រូវគ្នានឹងមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចនៅលើក្រាបនៃអនុគមន៍ទីតាំង នៅពេលដែលល្បឿនមធ្យមខិតទៅរកតម្លៃលីមីតពេល t ខិតទៅរក 5មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចខិតទៅរកតម្លៃលីមីតដូចគ្នាពេល t ខិតទៅរក 5។

ដូចនេះ ពេល t ខិតទៅរក 5

1. បន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុចខិតទៅរកបន្ទាត់តែមួយគត់ហៅថាបន្ទាត់ប៉ះ
2. មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់កាត់តាមពីរចំណុច m_{sec} ខិតទៅរក មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះ m_{tan} នៅត្រង់ចំណុច $(5, s(5))$។ ដូច្នេះ មេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះអាចសរសេរជា

$$m_{tan} = \lim_{t\to 5} m_{sec} = \lim_{t\to 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = 49$$

តម្លៃលីមីតនេះដូចគ្នានឹងតម្លៃលីមីតដែលកំណត់ល្បឿនខណៈ។ ដូច្នេះ ល្បឿនខណៈ $t = 5$ គឺជាមេគុណប្រាប់ទិសនៃបន្ទាត់ប៉ះនឹងខ្សែកោង ទីតាំងនៅ $t = 5$។

លីមីតនៃអនុគមន៍

និយមន័យ

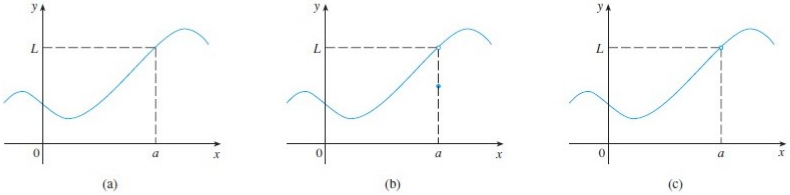
សន្មតថាអនុគមន៍ f កំណត់គ្រប់ xក្បែរ a (អាចលើកលែងត្រង់ a)។ បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L កាន់តែកៀកទៅៗពេលដែល x ខិតកាន់តែកៀក a (ពីសងខាង a) ប៉ុន្តែមិនស្មើនឹង a យើងសរសេរ

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

មានន័យថាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ស្មើនឹង L

សម្គាល់៖ ឃ្លា ``ប៉ុន្តែ $x \neq a$"នៅក្នុងនិយមន័យមានន័យថាការរកលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a យើងមិនគិតចំណុច $x = a$។ តាមពិតទៅ $f(x)$ មិនកំណត់នៅត្រង់ $x = a$ ក៏បាន។

អ្វីដែលសំខាន់គឺថាតើ f កំណត់យ៉ាងដូចម្តេចនៅក្បែរ a មានន័យថាតម្លៃនៃ $\lim_{x\to a} f(x)$ (បើមាន) អាស្រ័យលើតម្លៃនៃ f ក្បែរ a ប៉ុន្តែមិនអាស្រ័យលើតម្លៃនៃ $f(a)$។



នៅក្នុងករណីទាំងបី

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

សម្គាល់៖ (b) $f(a) \neq L$ និង (c) $f(a)$ មិនកំណត់

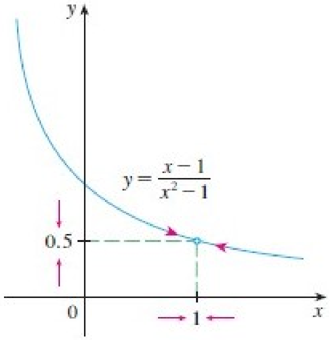
ឧទាហរណ៍

រកលីមីត

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

សម្គាល់ថាអនុគមន៍ $f(x) = (x-1)/(x^2-1)$ មិនកំណត់ $x = 1$ ប៉ុន្តែនេះមិនមែនជាបញ្ហាពីព្រោះតាមនិយមន័យនៃ $\lim_{x \to a} f(x)$ យើងពិនិត្យតម្លៃនៃ x ដែលនៅក្បែរ a ប៉ុន្តែមិនស្មើនឹង a ។

$x < 1$	$f(x)$	$x > 1$	$f(x)$
0.5	0.666667	1.5	0.400000
0.9	0.526316	1.1	0.476190
0.99	0.502513	1.01	0.497512
0.999	0.500250	1.001	0.499750
0.9999	0.500025	1.0001	0.499975



តាមតារាងនេះយើងអាចនិយាយបានថា

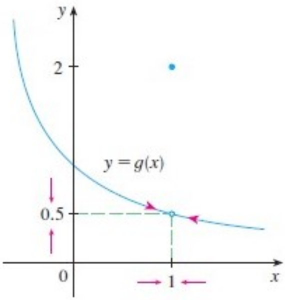
$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = 0.5$$

ឧទាហរណ៍

លីមីត

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 0.5$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2-1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$$



លីមីតឆ្វេង លីមីតស្តាំ

និយមន័យ

លីមីតស្តាំ: សន្មតថា f កំណត់បានចំពោះគ្រប់ x ក្បែរ a ដែល $x > a$។ បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L ពេល x ខិតទៅរក a ដែល $x > a$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

មានន័យថាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ពីខាងស្តាំស្មើនឹង L

លីមីតឆ្វេង: សន្មតថា f កំណត់បានចំពោះគ្រប់ x ក្បែរ a ដែល $x < a$។ បើ $f(x)$ ខិតទៅរក L ពេល x ខិតទៅរក a ដែល $x < a$ ដែលកំណត់សរសេរដោយ

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

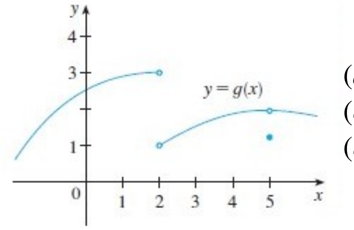
មានន័យថាលីមីតនៃ $f(x)$ ពេល x ខិតទៅរក a ពីខាងឆ្វេងស្មើនឹង L

ទ្រឹស្តីបទ

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \text{ លុះត្រាតែ } \lim_{x\to a^-} f(x) = L \text{ និង } \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

សម្គាល់៖ បើ $\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ នោះ $\lim_{x\to a} f(x)$ មិនមានលីមីត។

ឧទាហរណ៍



$(a).\ \lim_{x\to 2^-} g(x)$ $(b).\ \lim_{x\to 2^+} g(x)$
$(c).\ \lim_{x\to 2} g(x)$ $(d).\ \lim_{x\to 5^-} g(x)$
$(e).\ \lim_{x\to 5^+} g(x)$ $(f).\ \lim_{x\to 5} g(x)$

ចម្លើយ

$$(a).\ \lim_{x\to 2^-} g(x) = 3$$

$$(b).\ \lim_{x\to 2^+} g(x) = 1$$

ដោយសារ $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 3 \neq 1 = \lim_{x\to 2^+} g(x)$ ដូចនេះ $\lim_{x\to 2} g(x)$ មិនមានលីមីត។

$$(d).\ \lim_{x\to 5^-} g(x) = 2$$

$$(e).\ \lim_{x\to 5^+} g(x) = 2$$

ដោយសារ $\lim_{x\to 5^-} g(x) = 2 = \lim_{x\to 5^+} g(x)$ ដូចនេះ

$$\lim_{x\to 2} g(x) = 2$$

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យអនុគមន៍

$$g(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{|x-1|}$$

រកលីមីត $\lim_{x\to 1^-} g(x)$, $\lim_{x\to 1^+} g(x)$, និង $\lim_{x\to 1} g(x)$ បើមាន។

យើងសង្កេតឃើញថា g មិនកំណត់នៅត្រង់ $x = 1$។ យើងមាន

$$g(x) = \frac{2x^2 - 6x + 4}{|x-1|} = \frac{2(x-1)(x-2)}{|x-1|}$$

សម្រាប់ $x > 1, |x-1| = x - 1$ និង

$$g(x) = \frac{2(x-1)(x-2)}{x-1} = 2x - 4$$

សម្រាប់ $x < 1, |x-1| = -(x-1)$ និង

$$g(x) = \frac{2(x-1)(x-2)}{-(x-1)} = -2x + 4$$

ដូច្នេះ

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 4, & x > 1 \\ -2x + 4, & x < 1 \end{cases}$$

ដូច្នេះ

$$\lim_{x \to 1^-} g(x) = 2$$
$$\lim_{x \to 1^+} g(x) = -2$$

ដោយសារ $\lim_{x\to 1^-} g(x) = 2 \neq (-2) = \lim_{x\to 1^+} g(x)$ ដូចនេះ $\lim_{x\to 1} g(x)$ មិនមានលីមីត។

ឧទាហរណ៍

អនុគមន៍ H កំណត់ដោយ

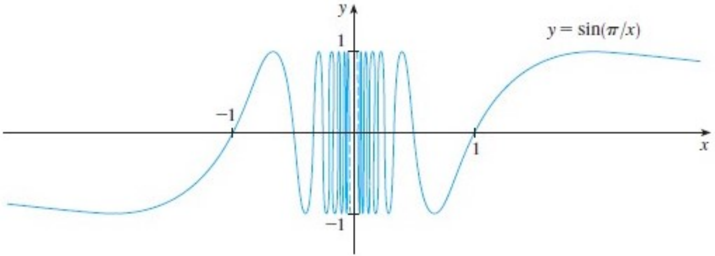
$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

- $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1$
- $\lim_{x \to 0} H(x)$ មិនមានលីមីតព្រោះ $\lim_{x \to 0^-} H(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} H(x)$

ឧទាហរណ៍

រកលីមីត

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{\pi}{x}$$



សម្គាល់ថាអនុគមន៍ $f(x) = \sin(\pi/x)$ មិនកំណត់ត្រង់ 0។ យើងមាន $f(1/n) = \sin n\pi = 0$ ចំពោះគ្រប់ចំនួនគត់ n។ យក $x = \frac{1}{2n+1/2}$ ពេលដែល n កាន់តែធំតម្លៃនៃ $x = \frac{1}{2n+1/2}$ ខិតទៅរក 0 នោះ $f(x) = 1$។យក $x = \frac{1}{2n+3/2}$ ពេលដែល n កាន់តែធំតម្លៃនៃ $x = \frac{1}{2n+3/2}$ ខិតទៅរក 0 នោះ $f(x) = -1$។ ដូច្នេះ $\sin(\pi/x)$ យោលចុះឡើងរវាង 1 និង -1 ចំពោះតម្លៃច្រើនអនេកខិតទៅរក 0 ។ ដូចនេះ

$$\lim_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x}$$

មិនមានលីមីតព្រោះ $f(x)$ មិនខិតទៅរកតម្លៃជាក់លាក់មួយពេល x ខិតទៅរក 0 ។

លំហាត់

1. គេឱ្យអនុគមន៍

$$g(x) = \frac{x^3 - 4x}{8|x-2|}$$

   គណនាលីមីត

   1. $\lim_{x\to 2^-} g(x)$
   2. $\lim_{x\to 2^+} g(x)$
   3. $\lim_{x\to 2} g(x)$

2. គេឱ្យអនុគមន៍

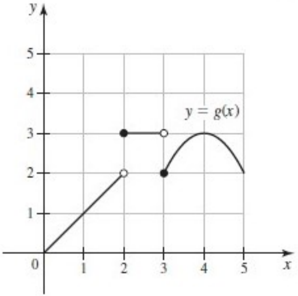
$$f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq -1 \\ 3, & x > -1 \end{cases}$$

   គណនា

   1. $\lim_{x\to -1^-} f(x)$
   2. $\lim_{x\to -1^+} f(x)$
   3. $\lim_{x\to -1} f(x)$

លំហាត់

គណនាលីមីតតាមក្រោម



$(a).\ \lim_{x\to 2^-} g(x)$ $(b).\ \lim_{x\to 2^+} g(x)$
$(c).\ \lim_{x\to 2} g(x)$ $(d).\ \lim_{x\to 3^-} g(x)$
$(e).\ \lim_{x\to 3^+} g(x)$ $(f).\ \lim_{x\to 3} g(x)$
$(g).\ \lim_{x\to 4} g(x)$

មាតិកា

1. សញ្ញាណសំខាន់ៗ
2. តើអ្វីជាលីមីតនៃអនុគមន៍?
3. ក្បួនគណនាលីមីត
4. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ក្បួនគណនាលីមីត

លីមីតនៃអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ

យក a, b និង m ជាចំនួនពិត។ ចំពោះអនុគមន៍លីនេអ៊ែរ $f(x) = mx + b$,

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a) = ma + b$$

ឧទាហរណ៍

១ បើ $f(x) = \frac{1}{2}x - 7$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{2}x - 7\right) = f(3) = -\frac{11}{2}$$

២ បើ $f(x) = 6$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} 6 = f(2) = 6$$

ក្បួនលីមីត

សន្មតថា $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ និង $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ មានលីមីត។លក្ខណៈខាងក្រោមពិតដែល c ជាចំនួនពិត និង $n > 0$ ជាចំនួនគត់

១
$$\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

២
$$\lim_{x\to a}(f(x) - g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

៣
$$\lim_{x\to a}(cf(x)) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

៤
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

៥
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)} \text{ បើ } \lim_{x\to a}g(x)\neq 0$$

៦
$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

៧
$$\lim_{x\to a}(f(x))^{1/n}=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^{1/n}$$

ដោយដឹងថា $f(x)>0$ ចំពោះ x ក្បែរ a បើ n គូ

ឧទាហរណ៍

សន្មតថា $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$, $\lim_{x\to 2} g(x) = 5$ និង $\lim_{x\to 2} h(x) = 8$។ គណនាលីមីត

១
$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)}$$

២
$$\lim_{x\to 2}(6f(x)g(x) + h(x))$$

៣
$$\lim_{x\to 2}(g(x))^3$$

១

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x\to 2}(f(x)-g(x))}{\lim_{x\to 2}h(x)} = \frac{\lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)}{\lim_{x\to 2}h(x)} = \frac{4-5}{8} = -\frac{1}{8}$$

២

$$\lim_{x\to 2}(6f(x)g(x)+h(x)) = \lim_{x\to 2}(6f(x)g(x)) + \lim_{x\to 2}h(x) = 6\lim_{x\to 2}(f(x)g(x)) + \lim_{x\to 2}h(x) = 6\left(\lim_{x\to 2}f(x)\right)\left(\lim_{x\to 2}g(x)\right) + \lim_{x\to 2}h(x) = 6\cdot 4\cdot 5+8 = 128$$

៣ $\lim_{x\to 2}(g(x))^3 = \left(\lim_{x\to 2}g(x)\right)^3 = 5^3 = 125$

ទ្រឹស្តីបទ

ក្បួនលីមីត ១ ដល់ ៦ នៅតែពិតបើជំនួស $\lim\limits_{x\to a}$ ដោយ $\lim\limits_{x\to a^-}$ ឬ $\lim\limits_{x\to a^+}$

ក្បួន ៧ ត្រូវបានប្តូរដូចខាងក្រោម

- $$\lim_{x\to a^+}(f(x))^{1/n}=\left(\lim_{x\to a^+}f(x)\right)^{1/n}$$

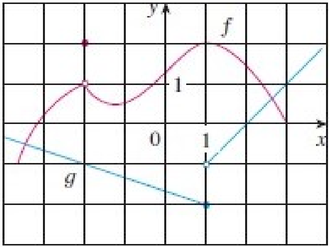
  ដោយដឹងថា $f(x)\geq 0$ ចំពោះ x ក្បែរ a ដែល $x>a$ បើ n គូ

- $$\lim_{x\to a^-}(f(x))^{1/n}=\left(\lim_{x\to a^-}f(x)\right)^{1/n}$$

  ដោយដឹងថា $f(x)\geq 0$ ចំពោះ x ក្បែរ a ដែល $x<a$ បើ n គូ

ឧទាហរណ៍

គណនាលីមីតតាមក្រាប



❶ $$\lim_{x\to -2}[f(x)+5g(x)]$$

❷ $$\lim_{x\to 1}[f(x)g(x)]$$

❸ $$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}$$

1. តាមក្រាបយើងឃើញថា

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 1, \quad \lim_{x\to-2} g(x) = -1$$

ដូច្នេះយើងមាន

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}[f(x)+5g(x)] &= \lim_{x\to-2} f(x) + \lim_{x\to-2}[5g(x)] \\ &= \lim_{x\to-2} f(x) + 5\lim_{x\to-2} g(x) \\ &= 1+5(-1) = -4\end{aligned}$$

2. យើងឃើញថា $\lim_{x\to1} f(x) = 2$ ប៉ុន្តែ $\lim_{x\to1} g(x)$ មិនមានលីមីតព្រោះ $\lim_{x\to1^-} g(x) = -2 \neq -1 = \lim_{x\to1^+} g(x)$ ដូចនេះយើងមិនអាចប្រើក្បួនផលគុណនៃលីមីតទេ។

យើងអាចប្រើក្បួនផលគុណសម្រាប់លីមីតម្ខាង

$$\lim_{x \to 1^-} [f(x)g(x)] = 2(-2) = -4, \quad \lim_{x \to 1^+} [f(x)g(x)] = 2(-1) = -2$$

លីមីតឆ្វេង និងលីមីតស្តាំមិនស្មើគ្នាដូចនេះ $\lim_{x \to 1}[f(x)g(x)]$ មិនមានលីមីត។

៣ តាមក្រាបយើងបាន

$$\lim_{x \to 2} f(x) \approx 1.4, \quad \lim_{x \to 2} g(x) = 0$$

ដូចនេះ $\lim_{x \to 2} \frac{f(x)}{g(x)}$ មិនមានលីមីតព្រោះ $\lim_{x \to 2} g(x) = 0$។

ឧទាហរណ៍

គេឱ្យ

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4, & x\leq 1\\ \sqrt{x-1}, & x>1\end{cases}$$

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to 1} f(x)$ បើមាន

- $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(-2x+4)=2$
- ចំពោះ $x>1$ នោះ $x-1>0$ យើងបាន

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=\sqrt{\lim_{x\to 1^+}(x-1)}=0$$

- ដោយសារ $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2\neq 0=\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ដូចនេះ $\lim_{x\to 1} f(x)$ មិនមានលីមីត។

សំណើ

បើ $f(x) = g(x)$ ពេល $x \neq a$ នោះ $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$ ដោយដឹងថាលីមីតមាន។

ឧទាហរណ៍

គណនាលីមីត

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$$

យើងមាន

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1 = g(x), \quad x \neq 1$$

ដូចនេះ

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$

លំហាត់

គេឱ្យអនុគមន៍

$$f(x) = \frac{x^3 - 6x^2 + 8x}{\sqrt{x-2}}$$

គណនាលីមីត $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ និង $\lim_{x\to 2} f(x)$ បើមាន

ដោយសារភាគបែងនៃ f គឺ $\sqrt{x-2}$, $f(x)$ គឺកំណត់បាននៅពេលដែល $x - 2 > 0$ ដូចនេះដែនកំណត់នៃ f គឺ $x > 2$។ យើងទាញបានថា $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ មិនមានលីមីតដែលនាំឱ្យ $\lim_{x\to 2} f(x)$ មិនមានលីមីត។ យើងគណនា $\lim_{x\to 2^+} f(x)$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{x(x-2)(x-4)}{(x-2)^{1/2}} = \lim_{x\to 2^+} x(x-4)(x-2)^{1/2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+} x \cdot \lim_{x\to 2^+} (x-4) \cdot \lim_{x\to 2^+} (x-2)^{1/2} = 2(-2)(0) = 0.$$

លំហាត់

1. គេឱ្យ

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < -1 \\ \sqrt{x+1}, & x \geq -1 \end{cases}$$

គណនាលីមីត $\lim_{x \to -1^-} f(x)$, $\lim_{x \to -1^+} f(x)$ និង $\lim_{x \to -1} f(x)$ បើមាន

2. គណនា

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2}$$

3. ពន្យល់ហេតុអ្វី

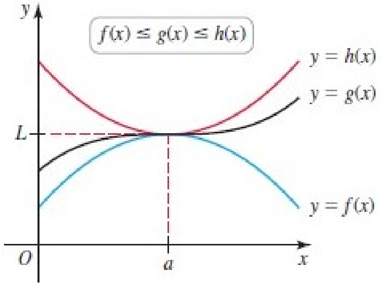
$$\lim_{x \to 2^-} \sqrt{x-2}$$

មិនមានលីមីត

ទ្រឹស្តីបទ Sandwich/ Squeeze/ Pinching

ទ្រឹស្តីបទ

សន្មតថាអនុគមន៍ f, g និង h ផ្ទៀងផ្ទាត់ $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ចំពោះគ្រប់តម្លៃ x ក្បែរ a (អាចលើកលែងត្រង់ a)។ បើ $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$ នោះ $\lim_{x \to a} g(x) = L$



ឧទាហរណ៍

ប្រើទ្រឹស្តីបទ Squeeze ដើម្បីបង្ហាញថា $\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$

សម្គាល់ថាយើងមិនអាចប្រើ

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 . \lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$$

ព្រោះ $\lim_{x\to 0} \sin(1/x)$ មិនមានលីមីត។
ចំពោះគ្រប់ចំនួនពិត $\theta, -1 \le \sin\theta \le 1$។ យក $\theta = 1/x$ ចំពោះ $x \neq 0$ នោះយើងទាញបាន

$$-1 \le \sin\frac{1}{x} \le 1$$

យើងដឹងថា $x^2 \geq 0$ នោះយើងបាន

$$-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$$

យើងដឹងថា

$$\lim_{x\to 0}(-x^2) = 0, \quad \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

យក $f(x) = -x^2, g(x) = x^2\sin(1/x)$ និង $h(x) = x^2$ នៅក្នុងទ្រឹស្តីបទ Squeeze យើងទទួលបាន

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin(1/x) = 0$$

ឧទាហរណ៍

បើ $4x-9 \le f(x) \le x^2-4x+7$ ចំពោះ $x \ge 0$។ រក $\lim_{x\to 4} f(x)$

យើងមាន

$$\lim_{x\to 4}(4x-9) = 7,$$
$$\lim_{x\to 4}(x^2-4x+7) = 7$$

តាមទ្រឹស្តីបទ Squeeze យើងទទួលបាន

$$\lim_{x\to 4} f(x) = 7$$

មាតិកា

1. សញ្ញាណសំខាន់ៗ
2. តើអ្វីជាលីមីតនៃអនុគមន៍?
3. ក្បួនគណនាលីមីត
4. ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

ភាពជាប់នៃអនុគមន៍

និយមន័យ

- អនុគមន៍ f ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ $x = a$ បើ $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
- អនុគមន៍ f ជាប់លើចន្លោះ I បើវាជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចក្នុង I

សម្គាល់ថាដើម្បីឱ្យ f ជាប់ត្រង់ a លក្ខខណ្ឌទាំងបីខាងក្រោមត្រូវផ្ទៀងផ្ទាត់

១. $f(a)$ កំណត់បាន $(a \in \mathcal{D}(f))$
២. $\lim_{x\to a} f(x)$ មានលីមីត
៣. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

សម្គាល់៖

- បើមានលក្ខខណ្ឌណាមួយមិនផ្ទៀងផ្ទាត់នោះអនុគមន៍មិនជាប់នៅត្រង់ a។

ឧទាហរណ៍

កំណត់ថាតើអនុគមន៍ $f(x) = 2x + 3$ ជាប់ត្រង់ $x = 4$?

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់ $x = 4$ ព្រោះ

១. $f(4) = 11$ កំណត់បាន
២. $\lim_{x \to 4} f(x)$ មានលីមីត
៣. $\lim_{x \to 4} f(x) = 11 = f(4)$

តាមពិតទៅ $f(x) = 2x + 3$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចទាំងអស់នៃ $\mathbb{R}$។

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 3, & x < -2 \\ x - 1, & x \geq -2 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = -2$? ហេតុអ្វី?

យើងមាន

1. $g(-2) = -3$ កំណត់បាន
2. យើងមាន

$$\lim_{x\to -2^-} g(x) = \frac{1}{2}(-2) + 3 = 2; \quad \lim_{x\to -2^+} g(x) = -2 - 1 = -3$$

ដោយសារ $\lim_{x\to -2^-} g(x) = 2 \neq -3 = \lim_{x\to -2^+} g(x)$ នោះ $\lim_{x\to -2} g(x)$ មិនមានលីមីត

ដូច្នេះ g មិនជាប់នៅត្រង់ -2

លំហាត់

១ តើអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & x \neq 4 \\ 7, & x = 4 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = 4$? ហេតុអ្វី?

២ តើអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} -x + 3, & x \leq 2 \\ x^2 - 3, & x > 2 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = 2$? ហេតុអ្វី?

ទ្រឹស្តីបទ

បើ f និង g ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់ a នោះអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់ a

១. $f+g$
២. $f-g$
៣. cf ដែល c ជាចំនួនថេរ
៤. fg
៥. $\frac{f}{g}$ បើ $g(a)\neq 0$
៦. $(f(x))^n$ ដែល $n>0$ ជាចំនួនគត់

ទ្រឹស្តីបទ

អនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់គ្រប់ចំណុចនៅក្នុងដែនកំណត់

- ពហុធា
- អនុគមន៍សនិទាន
- អនុគមន៍ឫសទី n
- អនុគមន៍ត្រីកោណមាត្រ
- អនុគមន៍អិចស្ប៉ូណង់ស្យែល
- អនុគមន៍លោការីត

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍ $f(x) = \frac{\ln x + e^x}{x^2 - 1}$ ជាប់ត្រង់ណាខ្លះ?

- អនុគមន៍ $y = \ln x$ ជាប់ចំពោះ $x > 0$ និង
- $y = e^x$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$
- នោះ $y = \ln x + e^x$ ជាប់លើ $(0, \infty)$។
- អនុគមន៍ $y = x^2 - 1$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$ ។

ដូច្នេះ f ជាប់គ្រប់ $x > 0$ លើកលែងតែ $x^2 - 1 = 0$ មានន័យថា f ជាប់លើចន្លោះ $(0, 1)$ និង $(1, \infty)$។

និយមន័យ

- អនុគមន៍ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ a បើ

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

- អនុគមន៍ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ a បើ

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

ឧទាហរណ៍

កំណត់ចន្លោះជាប់នៃអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 0 \\ 3x + 5, & x > 0 \end{cases}$$

អនុគមន៍ f ជាប់ត្រង់គ្រប់ $x \neq 0$ ដោយសារ f មានពីរផ្នែកដែលផ្នែកនីមួយៗពហុធា។ សិក្សាភាពជាប់នៃ f ត្រង់ 0

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (x^2 + 1) = 1,$$

មានន័យថា $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$។ ដូចនេះ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ 0។ ប៉ុន្តែដោយសារ

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x + 5) = 5 \neq f(0)$$

នោះ f មិនជាប់ខាងស្តាំត្រង់ 0 ។ ដូច្នេះ f ជាប់លើ $(-\infty, 0]$ និងលើ $(0, \infty)$។

លំហាត់

1. រកចំណុចដែលអនុគមន៍មិនជាប់

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x<0 \\ e^x, & 0 \le x \le 1 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$$

តើចំណុចណាក្នុងចំណោមចំណុចទាំងនេះដែល f ជាប់ខាងស្តាំ ឬជាប់ខាងឆ្វេង ?

2. តើ f ជាប់ត្រង់ $x=1$? តើ f ជាប់ខាងឆ្វេងត្រង់ $x=1$? តើ f ជាប់ខាងស្តាំត្រង់ $x=1$?

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x<1 \\ x^2+3x, & x \ge 1 \end{cases}$$

3. តើអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 4 \\ 2x - 5, & x \leq 4 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = 4$ ឬទេ?

4. តើអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3, & x \leq 1 \\ -2x + 5, & x > 1 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ឬទេ?

៥. តើអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, & x < 1 \\ 4 - x, & x \leq 1 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = 1$ ឬទេ?

៦. តើអនុគមន៍

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x, & x > 4 \\ 2x - 4, & x \leq 4 \end{cases}$$

ជាប់ត្រង់ $x = 4$ ឬទេ?

ទ្រឹស្តីបទ

បើ g ជាប់ត្រង់ a និង f ជាប់ត្រង់ $g(a)$ នោះ $f \circ g$ ជាប់ត្រង់ a

ទ្រឹស្តីបទនេះមានន័យថា

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a))$$

សម្គាល់៖ បើ g ជាប់ត្រង់ a នោះ $\lim_{x \to a} g(x) = g(a)$។ យើងទាញបានថា

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f(g(a)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

ឧទាហរណ៍

តើអនុគមន៍ខាងក្រោមជាប់ត្រង់ចំណុចណាខ្លះ?

1. $h(x) = \sin(x^2)$
2. $F(x) = \ln(1 + \cos x)$

1. យើងមាន $h(x) = f(g(x))$ ដែល $g(x) = x^2$ និង $f(x) = \sin x$។ g ជាប់លើ $\mathbb{R}$ និង f ជាប់លើ $\mathbb{R}$ នោះ $h = f \circ g$ ជាប់លើ $\mathbb{R}$។
2. យើងមាន $f(x) = \ln x$ ជាអនុគមន៍ជាប់និង $g(x) = 1 + \cos x$ ជាអនុគមន៍ជាប់នោះ $F(x) = f(g(x))$ ជាអនុគមន៍ជាប់ត្រង់កន្លែងដែលវាកំណត់បាន។ អនុគមន៍ $\ln(1 + \cos x)$ កំណត់បាននៅពេលដែល $1 + \cos x > 0$ នោះវាមិនកំណត់ពេលដែល $\cos x = -1$ ឬ $x = \pm\pi, \pm3\pi, \ldots$។ ដូច្នេះ F មិនជាប់ត្រង់ $x = \pm\pi, \pm3\pi, \ldots$ និងជាប់លើចន្លោះរវាងតម្លៃទាំងនេះ។